La Hoja de Cálculo en la resolución de problemas de Física.

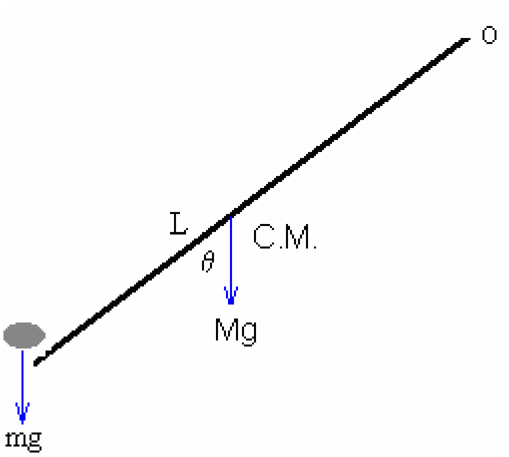
Jesús Ruiz Felipe. Profesor de Física y Química del IES Cristóbal Pérez Pastor de Tobarra (Albacete) CEP de Albacete.jesusruiz@sociedadelainformacion.com

Moneda sobre una Varilla que cae:

Partimos de una varilla en posición horizontal elevada a una altura L, que al descender, rota con respecto a un punto fijo O situado en uno de sus extremos. Si colocamos una moneda en el otro extremo y dejamos caer ambos objetos, la moneda se retrasará con respecto a la varilla. El centro de masas de la barra, adquiere una aceleración lineal inferior a la de la gravedad, mientras que la moneda está sujeta a una aceleración de 9,8 m/s^2 ya que la moneda ejecuta un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, mientras que la varilla efectúa un movimiento circular al estar uno de sus extremos sujeto. Sin embargo, el extremo de la varilla que mantiene la moneda, al encontrarse a una distancia con respecto a O, que es el doble a la que se encuentra el centro de masas, obtiene una aceleración lineal mayor que g.

Para calcular la aceleración lineal de la punta de la varilla se utilizará la ecuación dinámica de la rotación alrededor de un eje fijo, que es

$$mg\frac{L}{2}sen\vartheta = I_0\alpha$$



I_O es el momento de inercia de la varilla respecto de un eje perpendicular a la misma que pasa por su extremo O. (teorema de Steiner):

$$I_o = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2$$

Por tanto: $g\frac{3}{2L}sen\vartheta = \alpha$ El extremo de la varilla comenzará cayendo con una aceleración lineal a= α.L=3/2.g, mayor que la gravedad, y su aceleración no será g hasta que el ángulo se reduzca a arcsen(2/3), a partir de entonces disminuye por debajo de 9,8. ¿Decrece lo suficientemente rápido para que la moneda alcance el suelo antes que la varilla complete su cuarto de giro? Calcular el tiempo de vuelo de moneda es inmediato

$t=\sqrt{\frac{2L}{g}}$ pero averiguar el tiempo de caída de la varilla es más complicado. Para este cometido utilizaremos la hoja de cálculo.

1) Para hallar de forma analítica este lapso de tiempo aplicaremos el principio de conservación de la energía. La energía potencial gravitatoria de la varilla es la energía potencial de una partícula de masa *m* situada en el C.M. de la varilla. La energía potencial se transforma en energía cinética de rotación

$$E=\frac{1}{2}I_0\omega^2+mgL(1-\frac{1}{2}\cos\vartheta)=E_0=mgL(1-\frac{1}{2}\cos\vartheta_0)$$

$$\frac{1}{2}I_0\omega^2=mgL(\frac{1}{2}\cos\vartheta-\frac{1}{2}\cos\vartheta_0)\Rightarrow I_0\omega^2=mgL(2sen^2\frac{\vartheta_0}{2}-2sen^2\frac{\vartheta}{2})$$

Donde $sen^2\vartheta=\frac{1-\cos 2\vartheta}{2}$

El principio de conservación de la energía nos permite calcular la velocidad angular ω en función de la posición θ.

Utilizando las siguientes relaciones trigonométricas y cambios de variable:

$$(\frac{d\vartheta}{dt})^2=\frac{2mgL}{I_0}(sen^2\frac{\vartheta_0}{2}-sen^2\frac{\vartheta}{2})\Rightarrow dt=\sqrt{\frac{I_0}{2mgL}}\frac{d\vartheta}{\sqrt{sen^2\frac{\vartheta_0}{2}-sen^2\frac{\vartheta}{2}}}$$

$$sen\varphi=\frac{sen\frac{\vartheta}{2}}{sen\frac{\vartheta_0}{2}};K=sen\frac{\vartheta_0}{2}\,si\,\vartheta_0=\pi/2\Rightarrow k^2=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\vartheta}{2}=arcsen(ksen\varphi);\frac{d\vartheta}{\sqrt{2}}=\frac{k\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2sen^2\varphi}}\sqrt{2}$$

$$dt=\sqrt{\frac{I_0}{mgL}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2sen^2\varphi}}\sqrt{2}$$

$$t=\sqrt{\frac{I_0 2}{mgL}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2sen^2\varphi}}$$

Cuando $\vartheta=\vartheta_0\Rightarrow\varphi=\pi/2$. El periodo de una oscilación completa desde ϑ_0 es :

$$Periodo = 4\sqrt{\frac{I_0 2}{mgL}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 sen^2\varphi}}$$

Esta integral se denomina elíptica de primera especie.

El periodo de oscilación para pequeñas amplitudes se resuelve utilizando:

$$-mg\frac{L}{2}\vartheta = I_0(\frac{d\vartheta}{dt})^2$$

$$(\frac{d\vartheta}{dt})^2 + \frac{mg\frac{L}{2}\vartheta}{I_0} = 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{Po} = \sqrt{\frac{mg\frac{L}{2}}{I_0}} \Rightarrow Po = 2\pi\sqrt{\frac{2I_0}{mgL}}$$

Comparando los periodos

$$P = Po\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 sen^2\varphi}}$$

Este resultado es general para cualquier momento y ángulo de partida.

En una varilla rígida $Io = \frac{1}{3}mL^2$; Po/4 = **0.579s** para **L=2metros**, (el utilizado en la hoja de cálculo, que es variable)

Si se desarrolla en serie el denominador de la integral elíptica

$$(1-k^2\text{sen}^2\varphi)^{-1/2} = 1+\frac{1}{2}k^2\text{sen}^2\varphi+\frac{3}{8}k^4\text{sen}^4\varphi+\ldots$$

La integral se convierte en

$$\int_0^{\pi/2}\left(1+\frac{1}{2}k^2\text{sen}^2\varphi+\frac{3}{8}k^4\text{sen}^4\varphi+\ldots\right)d\varphi = \frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}k^2\frac{\pi}{4}+\frac{3}{8}k^4\frac{3\pi}{16}+\ldots$$

El desarrollo en serie del periodo *P* será

$$P = P_0\left(1+\frac{1}{4}\text{sen}^2\frac{\theta_0}{2}+\frac{9}{64}\text{sen}^4\frac{\theta_0}{2}+\ldots\right)$$

Si $\vartheta_0 = \pi/2$ (partimos de la horizontal) entonces el desarrollo en serie tiene un valor de 1,18 aproximadamente. El cálculo se basa en el procedimiento de Carlson para hallar la integral elíptica de primera especie o bien aplicando el procedimiento numérico de Runge-Kutta. En una varilla rígida P/4 (el tiempo que tarda en caer desde 90º) = **0.683s** para L=2metros. (P = 1,18. Po)

2) Ahora bien, con la ayuda de una hoja de cálculo podemos averiguar cuanto tiempo tarda en caer la varilla sin necesidad de realizar integral ninguna y utilizando simplemente las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Implementemos una columna donde vayan decreciendo los ángulos muy poco a poco. Cuanto más suave sea la diferencia mejor. A cada ángulo se le asigna una velocidad angular utilizando el principio de conservación de la energía

$E = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + mgL(1 - \frac{1}{2}\cos\vartheta) = E_0 = mgL(1 - \frac{1}{2}\cos\vartheta_0) \Rightarrow \omega_i^2 = \frac{mgL}{I_0}\cos\vartheta i$ ya que lanzamos desde 90º en reposo. Le asignamos también una aceleración angular:

$mg\frac{L}{2}sen\vartheta = I_0\alpha$

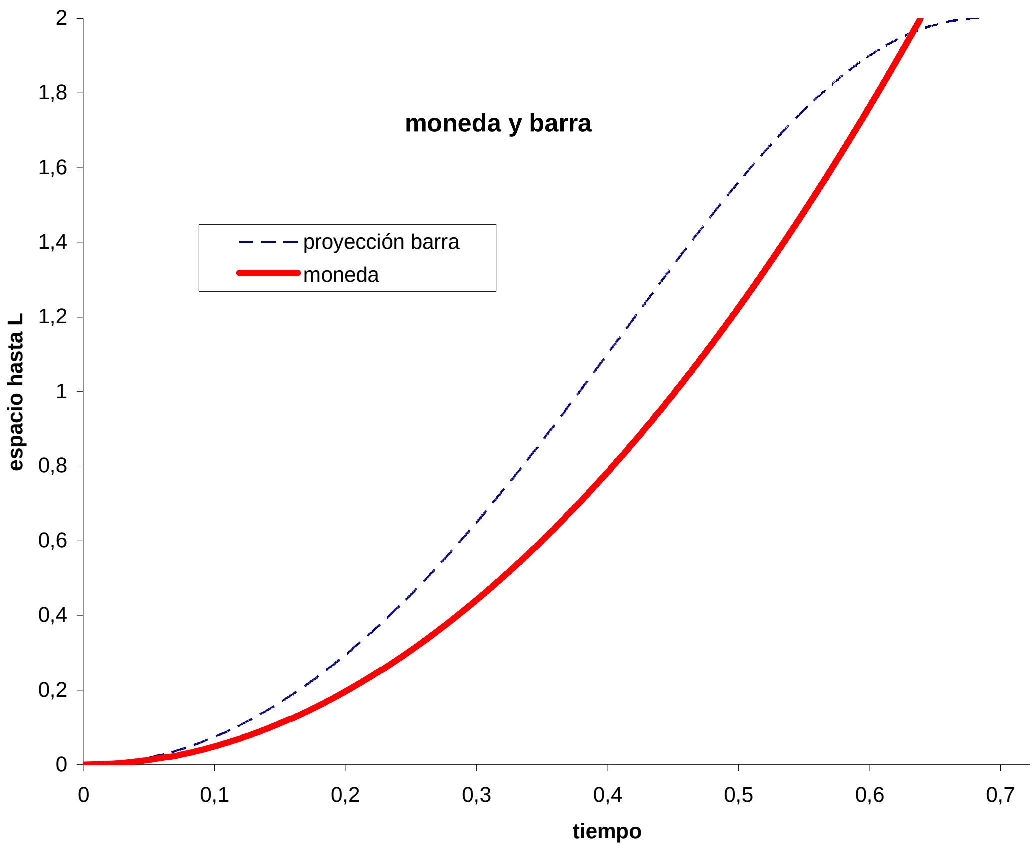
Para hallar el tiempo que tarda la varilla en recorrer el incremento de ángulo sí aproximamos de la siguiente manera. Suponemos que la aceleración de caída en ese tramo es constante (la media entre la aceleración final e inicial en el tramo). Por tanto:

$\omega_i = \omega_{i-1} + \overline{\alpha}_{media}\Delta t$ con $\overline{\alpha}_{media} = \frac{\omega_i + \omega_{i-1}}{2}$. Por tanto cuanto más cortos sean los intervalos, mayor precisión, ya que menos varía α. Sumamos todos los lapsos de tiempo y obtenemos el tiempo total de descenso. Sustituimos la integral por un sumatorio.

L = 2 metros	conservación energía: Eo=Ei	$mg\frac{L}{2}sen\vartheta = I_0\alpha$	$\omega_i = \omega_{i-1} + \overline{\alpha}_{media}\Delta t$	
Ángulo (rad)	velocidad angular	aceleración angular	incremento tiempo	Tiempo
1,570796	0,002191777	7,350000000	0	0
1,569	0,162499199	7,349988142	0,02181054	0,02181054
1,568	0,202746024	7,349971264	0,005475773	0,02728631
1,567	0,236232660	7,349947036	0,004556029	0,03184234
1,566	0,265529158	7,349915458	0,003985954	0,0358283
1,5655	0,279026235	7,349896913	0,00183636	0,03766466
1,565	0,291899857	7,349876530	0,00175154	0,0394162
1,564	0,316077894	7,349830252	0,003289594	0,04270579
[redacted]				
0,003	3,834049276	0,022049967	0,000260821	0,68280503
0,002	3,834054068	0,014699990	0,000260821	0,68306585
0,001	3,834056944	0,007349999	0,00026082	0,68332667
1,6986E-13	3,834057903	0,000000000	0,00026082	**0,683**58749

Unidades del S.I. Cifras no significativas.

Si comparamos la bajada de la moneda con la proyección de la varilla sobre la vertical, notaremos que la varilla al principio cae más deprisa, pero llega al suelo ligeramente antes la moneda.



La hoja de cálculo se descarga en este enlace http://www.sociedadelainformacion.com/12/varillaymoneda.xls

El parámetro L=2 metros (celda D4) es variable. Las ecuaciones empleadas y el manejo de la hoja no exceden el nivel de conocimientos de Bachillerato.

SOCIEDAD DE LA INFORMACION

www.sociedadelainformacion.com

Edita: CEF

Director: José Ángel Ruiz Felipe
Jefe de publicaciones: Antero Soria Luján
D.L.: AB 293-2001
ISSN: 1578-326x