Una experiencia docente en el taller de geometría y grafos en el mundo real

Arantzazu Fraile, Alberto Lastra y David Orden
arantzazu.fraile@uah.es, alberto.lastra@uah.es, david.orden@uah.es
Universidad de Alcalá

Resumen:
En esta comunicación presentamos parte de la experiencia docente llevada a cabo durante la XIII Semana de la Ciencia de Madrid, en noviembre de 2013, en el taller “Geometría y grafos en el mundo real”. El objetivo de este taller fue acercar las matemáticas a la realidad de los alumnos de secundaria y al público en general mediante tres actividades: la construcción del diagrama Voronoi para determinar dónde colocar los centros de interés, el estudio de la ruta más corta de un lugar a otro, y la manera de colocar las cámaras de vigilancia en un aeropuerto, todos estos problemas se resuelven haciendo uso de la herramienta GeoGebra.

El diagrama Voronoi:

Fijemos un conjunto finito de puntos en el plano. El diagrama Voronoi asociado a este conjunto de puntos consiste básicamente en la división del plano en distintas regiones de forma que cada una de éstas estará formada por aquellos puntos situados bajo la influencia de su correspondiente punto de entre los puntos fijados inicialmente. Dicho de otro modo, a cada punto del plano se le asociará aquel punto inicial que se encuentre a menor distancia de éste.

Si partimos de un conjunto inicial de puntos formado únicamente por dos puntos distintos entre sí, el diagrama Voronoi queda descrito por las dos regiones en que el plano queda dividido al trazar la mediatriz de dichos puntos. En efecto, cualquier punto en una de las regiones a uno u otro lado de la mediatriz describe los puntos que se encuentran a menor distancia de cada uno de los puntos (ver Figura 1). Cuando añadimos un número mayor de puntos a la construcción del diagrama, la cuestión se va complicando…

GeoGebra dispone de la herramienta Voronoi a partir de la cual, es inmediata la construcción del diagrama sin más que indicar los puntos iniciales a partir de los que queremos construir nuestro diagrama Voronoi (ver [1]). También se dispone de materiales adicionales en [2] y [3]. En la Figura 1 se pueden observar los diagramas Voronoi generados por dos puntos y también por otra cantidad de puntos mayor.

En el taller participaron distintos grupos de alumnos de varios cursos de enseñanza secundaria: tercero y cuarto y de primero y segundo de Bachillerato de distintos centros de la comunidad de Madrid y la provincia de Guadalajara. También se realizó una sesión especial para un público general a la que asistieron los alumnos del Master de Formación del Profesorado, pertenecientes a la especialidad de Matemáticas de la Universidad de Alcalá. Para transmitir a cada participante la construcción del diagrama de forma que pudiera comprender en qué se basaba, primeramente les introdujimos brevemente el concepto de diagrama Voronoi, se les explicó qué sucede cuando se parte de dos puntos, y seguidamente se les planteó la siguiente cuestión:

“¿A qué oficina de correos debes dirigirte si quieres dirigirte a la oficina más próxima a tu vivienda?”

Para poder realizar un trabajo homogéneo, se les facilitó un mapa de Alcalá de Henares en el que se habían señalado las seis oficinas de correo situadas en su término municipal (ver Figura 2).
Si nos fijamos sólo en dos oficinas al azar, por ejemplo, la oficina A y la oficina B, los alumnos se dieron cuenta de que la zona de influencia de la oficina A son los lugares más cercanos a ésta, y lo mismo pasa con la oficina B. El diagrama Voronoi resulta determinar claramente las dos zonas del plano divididas por la mediatriz de dichos puntos (ver Figura 3).

A partir de este punto se les dejó reflexionar a los alumnos la manera en la que se puede proceder para añadir el resto de puntos. Una posible construcción iterativa es la siguiente:
1.- Elijamos una oficina de correos restante.
2.- Veamos qué zona del mapa correspondiente a la zona de influencia de cada uno de los puntos ya considerados pasa a ser zona de influencia de este nuevo punto. Es decir, buscamos los puntos más cercanos a esta oficina de correos que a las que ya hemos colocado.
3.- Determinemos las nuevas zonas de influencia restantes.
Muchos de los alumnos se dieron cuenta de que este procedimiento era el adecuado para obtener el diagrama Voronoi. También, que el punto 2 se puede leer a partir de las mediatrices determinadas por el nuevo punto y cada uno de los puntos ya añadidos.
Así, habiendo añadidos los dos primeros puntos, el algoritmo anterior nos permite añadir un tercero, y, volviendo de nuevo a ejecutar el algoritmo, ahora con tres puntos, añadimos un cuarto a la construcción. Así hasta que no queden puntos que tratar. Mostramos el paso de dos a tres puntos en la Figura 4.

Por último, se les enseñó a los participantes fotografías de otras posibles aplicaciones del diagrama Voronoi, como la distribución de las manchas en las jirafas (ver [5]), algún ejemplo del diagrama Voronoi en tres dimensiones usado en arquitectura (ver [6]), o el ejemplo de los surcos que quedan en la tierra al secarse (ver [7]).

El algoritmo de Dijkstra:
No nos pararemos tanto ni en ésta ni en la siguiente actividad del taller ya que para llevarlas a cabo no es necesario el uso de Geogebra (en el taller sí se hizo uso de la misma). Es por esto que se ha decidido añadirlas a la comunicación por completitud, de forma que se de una visión global del taller, cuyo objetivo era acercar las matemáticas al mundo real a los asistentes.

La información correspondiente a esta actividad se encuentra en [8] y [9]. La actividad se planteó de forma que los asistentes tuvieran que encontrar la ruta más corta entre Madrid y Santander. Para ello, se utilizó un mapa de las rutas que con más seguridad fueran las más acertadas como solución, y se representaron mediante un grafo, con nodos en ciudades por las que pasaba el camino, y con pesos en las aristas dados por la distancia correspondiente a los nodos que une (ver Figura 5).
Siguiendo el algoritmo Dijkstra, se fue construyendo una tabla con distancias y vértices desde el que se llega de Madrid a Santander (ver Figura 6).

Cámaras de vigilancia:
La última actividad comenzó encomendándoles a los asistentes la colocación de cámaras de seguridad en un aeropuerto de forma que colocaran la menor cantidad

posible de éstas, sin llegar a general puntos ciegos. El aeropuerto elegido fue el aeropuerto de Málaga (ver Figura 7, izquierda). Tras obtener el polígono asociado al aeropuerto, parece lo más lógico que las cámaras se sitúen en los vértices de éste (no necesariamente en todos, claro) de forma que se tenga una capacidad de visión máxima (ver Figura 7, derecha).

Tras utilizar algunos polígonos de prueba, se les convenció a los asistentes de que teniendo una cantidad de cámaras como mucho dada por un tercio del número de vértices era suficiente siempre para tener vigilado todo un recinto. Los vértices se pueden elegir mediante triangularización de éste, y pintando los vértices con tres colores, de forma que no haya vértices de un mismo color para ningún triángulo en la construcción (ver Figura 8). Dando los colores de dos vértices adyacentes se tiene determinado el color de todos los demás. Así, si se colocan las cámaras en los vértices de un mismo color, se tiene una visión total del polígono, y con una cantidad de cámaras que no supera el tercio de los vértices de éste.

La actividad concluyó con la introducción de un problema muy relacionado con éste, como es el problema de los cuatro colores. La información para esta parte fue obtenida de [10], [11].

Impresiones de los alumnos y resultados. Conclusiones:
En general, estas actividades tuvieron una buena aceptación por parte de los participantes. Sin embargo, a nuestro parecer, fueron los alumnos más mayores de bachillerato y sus tutores los que mejor se involucraron en la realización de cada actividad, y más respuestas han enviado al cuestionario y los problemas abiertos que se les dejaron planteados. También, la sesión para un público general, a la que acudieron alumnos del Master de Profesorado de la especialidad de Matemáticas de la Universidad de Alcalá, fue un rotundo éxito.

Queremos señalar las conclusiones obtenidas a partir del grupo que menos disfrutó de la actividad: un centro llevó todos los alumnos de secundaria matriculados en su centro: de primero a cuarto, no podemos decir que la experiencia fuera satisfactoria: a la escasa atención de los alumnos se une el nulo interés mostrado por sus profesores, ninguno de ellos quiso quedarse a participar de la actividad, lo novedoso de la propuesta con respecto a los problemas que están habituados a resolver, lo extensa de esta y lo poco adecuado del horario (toda la mañana) con respecto a sus horarios habituales.

Bibliografía:
[1] Comando Voronoi – GeoGebraWiki
http://wiki.geogebra.org/es/Comando_Voronoi
[2] Voronoi by surfaces – GeoGebraTube
http://www.geogebratube.org/material/show/id/63712
[3] Voronoi Diagram Animation – GeoGebraTube
http://www.geogebratube.org/material/show/id/57992
[4] Google Maps
https://maps.google.es/
[5] Diagrama de Voronoi | Fotomat
http://www.fotomat.es/diagrama-de-voronoi/
[6] Cada uno en su región y Voronoi en la de todos – Taringa!

http://www.taringa.net/posts/ciencia-educacion/15012590/Cada-uno-en-su-region-y-Voronoi-en-la-de-todos.html
[7] Estudio sobre el diagrama Voronoi | Makeitbundeeeeeeeeeeeem
http://favelapainting.wordpress.com/2012/06/04/estudio-sobre-el-diagrama-de-voronoi/
[8] De rama en rama, pero por el camino más corto
http://blogs.20minutos.es/mati-una-profesora-muy-particular/tag/algoritmos-de-dijkstra/
[9] Algoritmo de Dijkstra – Wikipedia, la enciclopedia libre
http://es.wikipedia.org/wiki/Algoritmo_de_Dijkstra
[10] Gregorio Hernández Peñalvel, Iluminación de galerías de arte. Disponible en
http://www.dma.fi.upm.es/gregorio/galerias.pdf
[11] Díaz Moreno, José Manuel. “Vigilando el museo”. Acta Mathematica Vulgata, Vol.1, pp. 23-28, 2005. Disponible en
http://www2.uca.es/matematicas/RDM/Volumen-2005-1/Vigilando_el_museo.pdf

Anexo I: Figuras

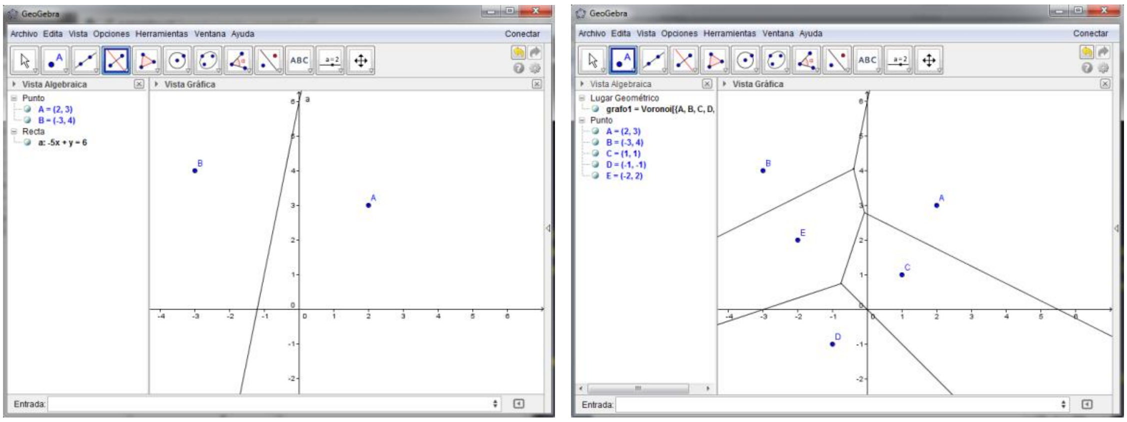


Figura 1: Diagrama Voronoi a partir de dos puntos (izquierda), cinco puntos (derecha)

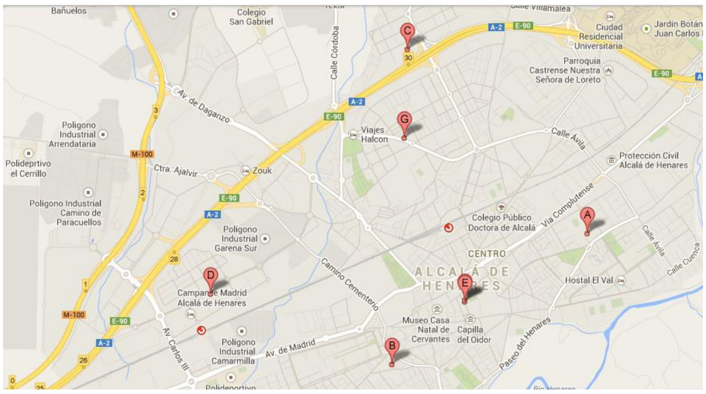


Figura 2: Mapa de Alcalá de Henares con sus oficinas de correos. Imagen de [4]

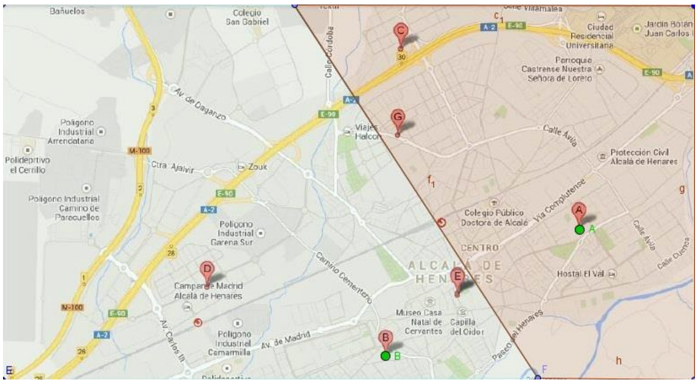


Figura 3: Primera etapa en la construcción del diagrama

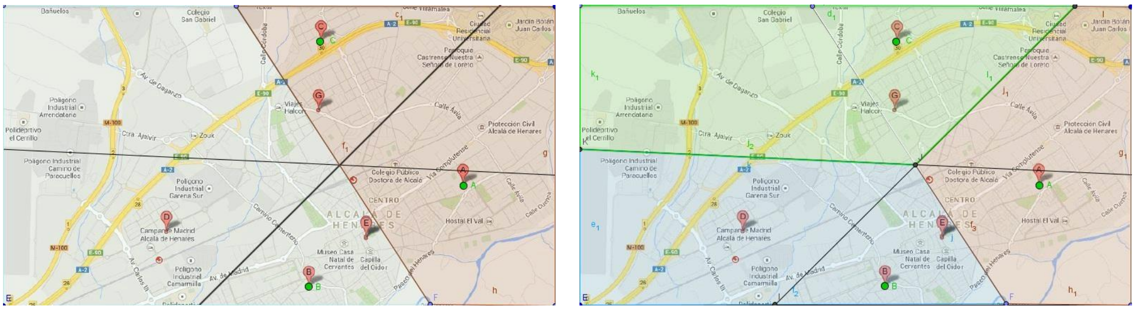


Figura 4: Paso de 2 a tres puntos en el diagrama Voronoi

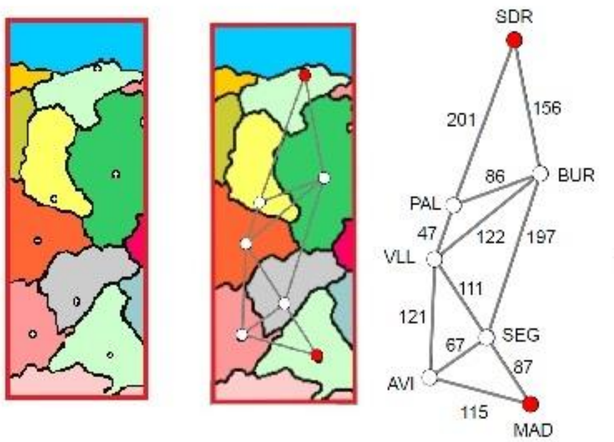
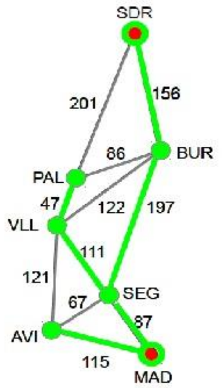


Figura 5: Construcción del grafo



	Distancia desde MAD	Anterior
AVI	115	MAD
SEG	87	MAD
VLL	198	SEG
PAL	245	VLL
BUR	284	SEG
SDR	440	BUR

Figura 6: Resultado final según el algoritmo

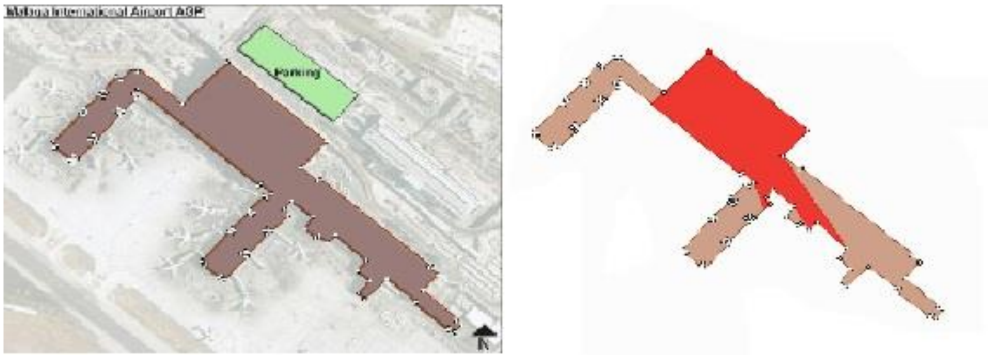
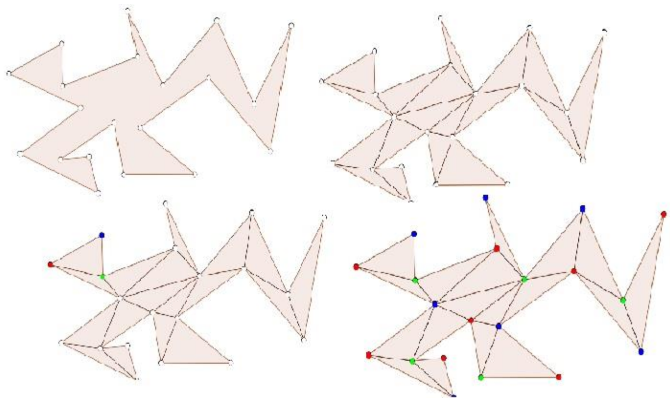


Figura 7: Aeropuerto de Málaga. Cámara y su zona de visión

Figura 8: Triangulación y coloreado de un polígono



Edita: CEFALEA

Director: José Ángel Ruiz Felipe
Jefe de publicaciones: Antero Soria Luján
D.L.: AB 293-2001
ISSN: 1578-326x