

VERIFICACIÓN DE LA ESTABILIDAD DE ESTRUCTURAS DE FÁBRICA MEDIANTE GEOMETRÍA DINÁMICA

David Mencías Carrizosa - Arquitecto

Grupo de Investigación AIPA – Análisis e Intervención en el Patrimonio Arquitectónico
Universidad Politécnica de Madrid, Madrid (España)
dameca@gmail.com

RESUMEN: La resolución de problemas de estabilidad de estructuras de fábrica (ladrillo, sillería, mampostería,... convenientemente trabadas), se ha realizado tradicionalmente mediante geometría gráfica, obteniendo la poligonal que describe la línea de empujes. Sin embargo, ésta estrategia no permite una fácil e inmediata modificación de las condiciones iniciales, ya que el procedimiento es muy tedioso y el repetirlo no tiene ningún interés didáctico. El apoyo de herramientas de geometría dinámica, por medio de la interacción entre el usuario y la estructura de manera muy directa, permite el entendimiento de cómo la geometría afecta a la estabilidad y por tanto, la validez de estas estructuras. Esta herramienta también es aplicable al estudio y la comprensión de todas las estructuras que deben su sentido a la geometría, más que a la resistencia y que su diseño se basa casi exclusivamente en la forma.

1. INTRODUCCIÓN: EQUILIBRIO DE FÁBRICAS Y GEOMETRÍA

1.1. ESTÁTICA GRÁFICA

Las estructuras tradicionales (entre las que se encuentran casi exclusivamente las fábricas) se analizaban por medios gráficos, donde la forma y la geometría desempeñaban un papel fundamental. La estática gráfica, es una herramienta muy potente que consiste en obtener los polígonos funiculares de fuerzas, usando métodos gráficos de geometría. La teoría de análisis límite, actualmente vigente en la teoría de estructuras, aplicado a las estructuras de fábrica, establece que una estructura es segura si se puede encontrar un estado de equilibrio compatible con las cargas que no viole la condición de límite, esto es, las cargas se transmiten siempre dentro de la fábrica. La potencia del teorema de la seguridad radica en que esta solución no tiene que ser la "real"; basta con encontrar una solución para demostrar que la estructura es segura. Por tanto, un arco de fábrica será seguro si es posible dibujar una línea de empujes contenida en su interior. Es por ello que una vez determinada dicha curva, si esta se encuentra en el interior, el arco será seguro por lo que es fundamental poder dibujarla correctamente.

En la actualidad, este procedimiento se lleva a cabo mediante el uso de programas de CAD, que permiten una precisión perfecta en las construcciones, lo que da a su vez, una garantía de los resultados casi absoluta. Sin embargo, la aplicación de estas

técnicas no reduce la monotonía del proceso y no elimina la gran cantidad de trabajo gráfico que debe realizarse. La gran desventaja de este sistema es que no permite una fácil e inmediata modificación de la geometría ya que el procedimiento es muy tedioso y el repetirlo no tiene ningún interés didáctico.

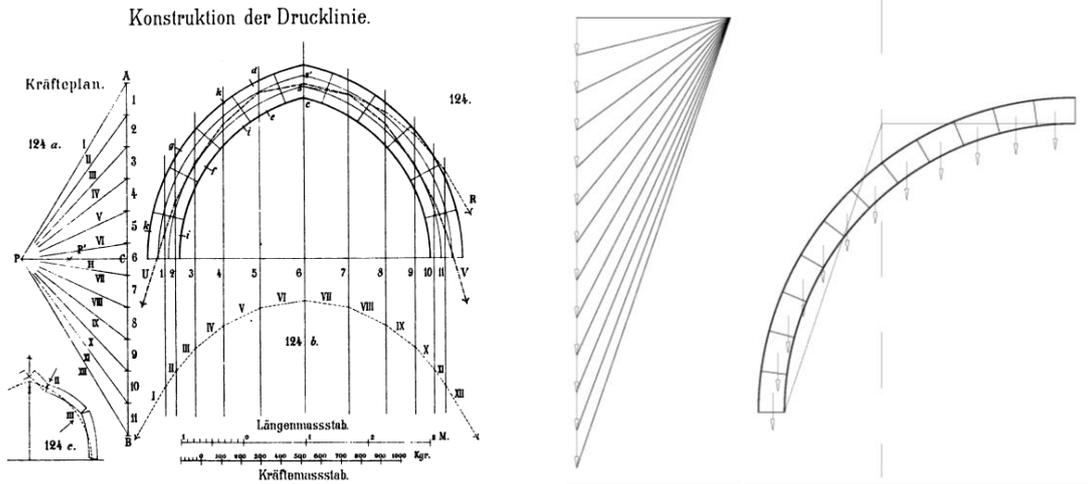


Figura 1. Resolución gráfica de arcos: estática gráfica tradicional (Ungewitter 1901 [1]) y actual con CAD (Autor, 2013).

1.2. DETERMINACIÓN ANALÍTICA

La determinación analítica, para la línea de empujes en bóvedas, adaptándola para arcos y adecuando la notación a la establecida en la actualidad, se encuentra desarrollada por Santiago Huerta [2] a partir de los trabajos de M. Milankovitch (1908). La ecuación general, se obtiene a partir de la resolución de la ecuación diferencial (1).

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{w(x)}{H} \quad (1)$$

En los casos para los que se eligen unos planos de corte verticales o el arco es infinitamente delgado (hilo pesado), el centro de gravedad coincide con el punto medio de la sección. Partiendo de esta premisa y para el caso de que existan sólo cargas verticales (que predominan en las estructuras de fábrica muy por encima de las horizontales), estableciendo el equilibrio global de la estructura se determinan las ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} \sum M &= 0 & V \cdot dx - H \cdot dy &= 0 \\ \sum F_V &= 0 & V &= P + \int_{x_0}^x w(L) dL \\ \sum F_H &= 0 & H &= Q \end{aligned} \quad (2)$$

De lo que se obtiene la ecuación de la línea de empujes para el sistema de coordenadas cartesianas:

$$y = I_0 + \frac{1}{H} \int_{x_0}^x w(L) dx + \frac{P}{H} (x - x_0) \quad (3)$$

2. APLICACIONES EN ESTRUCTURAS CONCRETAS

2.1. ESTRIBO

El estribo de directriz recta, desde el punto de vista matemático, es el más sencillo de las estructuras tipo arco, debido a que se puede simplificar geoméricamente, como dos rectas paralelas. En el caso concreto de un arbotante, su función primordial es de trasladar una fuerza horizontal en la base de la bóveda hasta el contrafuerte, de manera que se forme un arco inclinado en su interior.

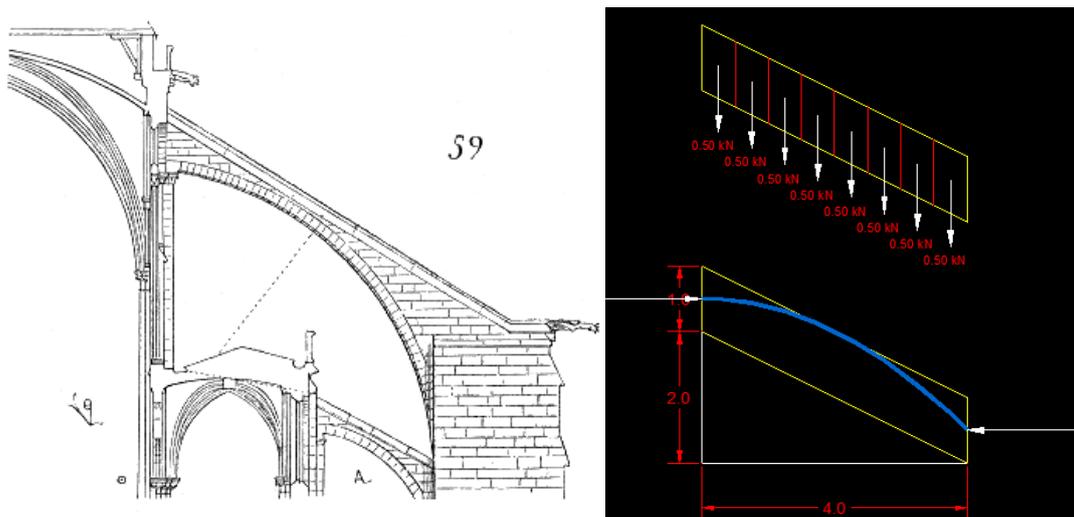


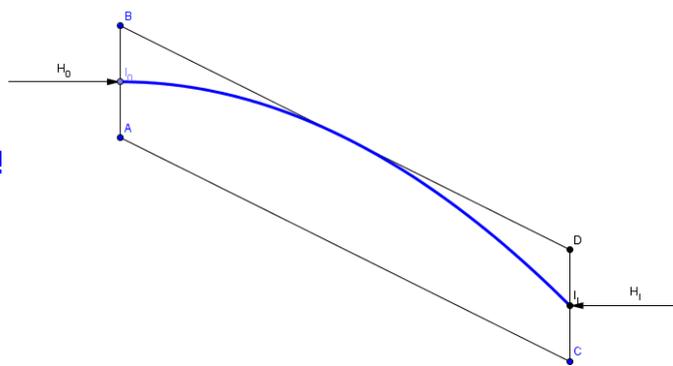
Figura 2. Arbotante de la Catedral de Notre Dame de París (izq, [3]) y comprobación de estabilidad de un estribo mediante estática gráfica en CAD (dch).

Su determinación analítica es muy sencilla, ya que se parte de dos rectas que determinan sus bordes y de una fuerza horizontal en su extremo. El estribo será estable si se forma la curva de la línea de empuje en su interior, tal y como expresa Mas-Guindal [4].

Una vez establecidas las funciones que conforman el

www.sociedadelainformacion.com

Edita Cefalea



borde superior e inferior - $f_1(x)$ y $f_2(x)$ – se obtiene la función peso por medio de la diferencia de las integrales correspondientes que se denota como $w(x)$. Como se expresa en la ecuación (3) la curva empuje – $e(x)$ – parte de un punto inicial situado en el extremo izquierdo del estribo (l_0) hasta el extremo final (l_1) con una pendiente inicial definida por el cociente P/H . La comprobación gráfica, se realiza de manera inmediata, por medio de la vista gráfica de GeoGebra (Figura 3).

Figura 3. Comprobación de equilibrio

Los parámetros dinámicos, además del espesor y la longitud del estribo, son las variables que definen la familia de curvas, esto es, el punto de paso inicial (l_0) y el empuje horizontal (H). Con los diferentes valores de estos parámetros, se puede comprobar de manera muy intuitiva y sencilla, la dependencia entre la longitud del estribo, su peso y cómo distintos valores de empuje H , pueden permitir o no el equilibrio.

Por otra parte, las situaciones límite, son las que corresponden al empuje máximo y al empuje mínimo, y se pueden determinar gráficamente de manera muy sencilla, buscando la tangencia entre la curva y las bordes del estribo. Dichas situaciones corresponderán a las dos situaciones de colapsos de la estructura, como se describe en [5].

2.2. ARCO DE MEDIO PUNTO

Al igual que en el caso anterior, un arco de medio punto, se define a partir de la función de la cara exterior (extradós) y la interior del arco (intradós). Como la función de la semicircunferencia se establece como raíz cuadrada, la situación se complejiza desde el punto de vista algebraico, ya que las integrales son más complicadas que en el caso anterior y empiezan a aparecer funciones trigonométricas.

Otra diferencia con el caso anterior se encuentra en las constantes de integración. Mientras que en el estribo todas las constantes eran nulas, en el caso del arco semicircular, la segunda integral tiene un valor diferente – $v(0)$ –, que hay que tener en cuenta para que la curva pase por el punto inicial l_0 .

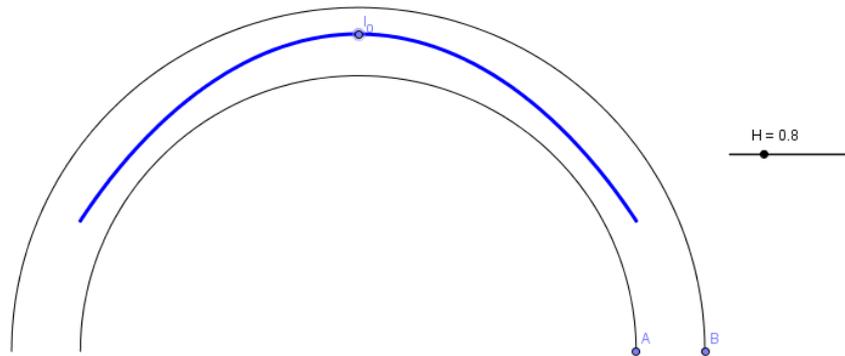


Figura 4. Línea de empujes en un arco de medio punto

Los parámetros dinámicos se mantienen el punto de paso de la curva por la clave (l_0) y el empuje (H) del arco, así como la luz (distancia entre apoyos) del arco y el espesor, estos últimos controlados mediante el punto de paso de la ecuación arco A y B, como se muestra en la figura 4.

2.3. ARCO PARABÓLICO CON CARGAS PUNTUALES

Siguiendo el mismo planteamiento de los ejemplos anteriores, el arco de directriz parabólica, posee una línea de empujes en función de la función peso del arco $w(x)$. En este caso se incluyen cargas puntuales en el extradós para comprobar como la línea de empujes se “dobla” al ser afectadas por dichas fuerzas. Esta curva se define como una función a trozos, entre el punto de paso inicial y la ordenada del vector que representa la fuerza. En el ejemplo que se muestra en la figura 5, se verifica la estabilidad de un arco parabólico simétrico en forma y cargas con seis cargas puntuales en el extradós.

Dado que las funciones que definen el arco son polinómicas así como sus integrales sucesivas, se añade la complejidad con otros parámetros dinámicos tales como el peso específico del material con el que está realizado el arco, el ancho del arco o bóveda y se muestra el vector resultante en el apoyo.

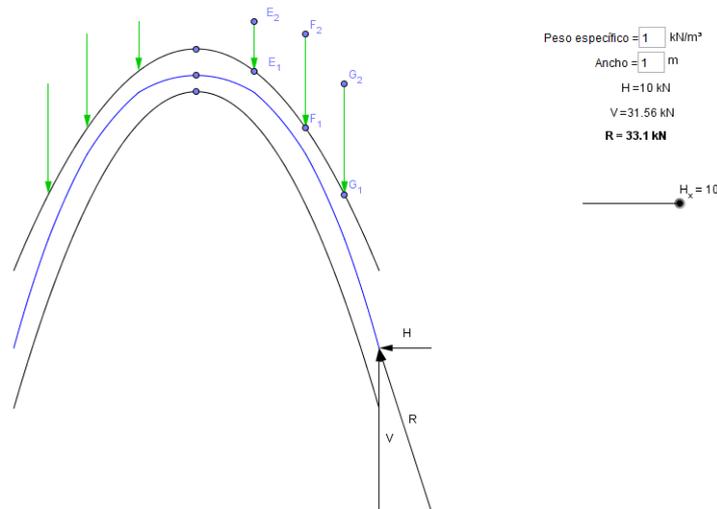


Figura 5. Línea de empujes en un arco parabólico con cargas puntuales simétricas

CONCLUSIONES

Disponer de una herramienta como GeoGebra, que permita de manera dinámica, modificar, tanto la geometría de la estructura como los parámetros que intervienen en la curva de empujes, resulta muy útil para comprender como influye en su comportamiento. Frente al tedioso procedimiento tradicional de comprobación gráfica, cuya repetición no añade ningún valor didáctico, el disponer de una herramienta dinámica posibilita la realización de múltiples ejemplos diferentes y su comparación. Además permite visualizar la relación entre geometría gráfica y su representación algebraica y la utilidad que existe de los conocimientos básicos matemáticos en disciplinas técnicas como la arquitectura o la ingeniería estructural.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] UNGEWITTER, G. "Lehrbuch der Gotischen Konstruktionen". Leipzig, 1901
- [2] HUERTA S. "Arcos, bóvedas y cúpulas: geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica". Madrid, Instituto Juan de Herrera, 2004.
- [3] VIOLLET-LE-DUC, E. "Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XIe au XVIe siècle". París, 1854.
- [4] MAS-GUINDAL LAFARGA AJ. "Mecánica de las Estructuras Antiguas o Cuando las Estructuras no se Calculaban", Madrid, Munilla-Lería, 2011.
- [5] HEYMAN J. "Teoría, Historia y Restauración de Estructuras de Fábrica: Colección de Ensayos". Madrid, Ministerio de Obras Públicas, Transportes y Medio Ambiente, Centro de Publicaciones, 1995.



www.sociedadelainformacion.com

Edita:



Director: José Ángel Ruiz Felipe

Jefe de publicaciones: Antero Soria Luján

D.L.: AB 293-2001

ISSN: 1578-326x