TALLER DE FUNCIONES CON GEOGEBRA PARA SECUNDARIA

Autor: Carlos Motos Martínez-Esparza

Email:carlosmotos2000@gmail.com

IES LEONARDO DA VINCI

ALBACETE

RESUMEN: *GEOGEBRA* es algo más que un programa de geometría dinámica. Prácticamente puede utilizarse como recurso desde los primeros cursos de primaria a los cursos iniciales de grado de carreas técnicas, científicas y las relacionadas con el mundo económico. El autor propone una serie de actividades sencillas a propósito **del análisis de funciones aplicables** a todos los cursos de la ESO que recojan además las nuevas mejoras y herramientas de las últimas versiones de GEOGEBRA.

1ª ACTIVIDAD Preparando el programa

En este curso supondremos que todo el mundo conoce de manera rudimentaria Geogebra y que lo está instalado en cada uno de los puestos informáticos.

Arrancamos el programa haciendo doble click en el icono

🔿 GeoGebra						_ 🗆 🗙
Archiv Edit: Vist: Opcion: Herramie	n Ventar Ayud	Abrir sesió	n como carl	os motos	martinez-	esparza
			АВ	С	.	() () () () () () () () () () () () () (
Vista Algebraica ×	Vista Gráfic	a				Ayuda
			3-			
			2-			
			1-			
						4
		2 1	0	-	2	- <u>-</u>
	-3	-2 -1	ľ		2	3
			-1-			
			-2-			
Entraua:						



y nos encontraremos una pantalla como ésta:

Podemos distinguir las dos vistas más importantes de GEOGEBRA:

a)Vista algebraica. Aquí se verán reflejadas todas las formulas y objetos de nuestras construcciones

 b) Vista Grafica (2-D) donde se dibujaran todos nuestros gráficos

Como vamos a trabajar con alumnos de secundaria estableceeremos las siguientes opciones en el programa por derfecto:

a) Es recomendable que usemos la rejilla .Nos ayuda a localizar y representar objetos.(todo es un objeto en geogebra).Haciendo click con el botón derecho en el tapiz blanco de la vista grafica aparecerán las siguientes opciones:



La vista final debe quedar así .

Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Avuda Abrir ses \bigcirc ABC 2 (\cdot) Vista Algebraica × Vista Gráfica з 0 Entrada:

Seleccionamos y la activamos 🌐 Cuadrícula

b) También es importante que esté activado el cajón de entrada .Algunas instalaciones no lo tienen activado por defecto y es en ese cajón donde vamos a introducir nuestras funciones y comandos. Aparece en la parte inferior de la ventana del programa (este es el cajón)

Entrada:

Ahora ya podemos empezar a trabajar con funciones y trastear con las diferentes opciones del programa.

2ª Actividad Introducción de funciones en Geogebra

Haremos una observación: geogebra dispone desde las últimas versiones de una VISTA GRAFICA 2, con la misma funcionalidad que la vista grafica1. Aunque tiene mucha utilidad, le podemos dar un uso diferente. Es ideal para introducir escaneada una hoja de ejercicios y tareas para los alumnos. En nuestro caso importaremos una hoja con las principales funciones y sintaxis de las funciones de Geogebra

Paso 1. Activaremos la vista grafica 2. Haciendo clic en el menú vista se desplegarán las siguientes opciones:



Clicamos en vista grafica 2 para activarla

En la vista grafica 2 haciendo clic derecho con el ratón en un punto del tapiz desactivamos la vista de los ejes coordenados para poder introducir nuestra imagen

Vista Gráfica 2	
🛩 🛄 Ejes	
🏢 Cuadrícula	
Barra de Navegación	
Q Zoom	•
EjeX : EjeY	•
Mostrar todos los objetos	
Vista estándar	Ctrl+M
🌼 Vista Gráfica	

GeoGebra Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda Abrir sesión como carlos motos mart •) \mathbb{R} (\cdot) ٦ ABC OK ↔ Vista Algebraica Vista Gráfica Vista Gráfica 2 3 2 -'2 n Entrada:

Las distintas vistas se activan haciendo clic en ellas con el ratón.

¡MUY IMPORTANTE! A menudo ocurre que trabajando con estas dos vistas, el alumno introduce una función y no ve el dibujo. Esto ocurre porque tiene activada la vista 2 con los ejercicios, y la función se le está dibujando por debajo de esa hoja. Hay que pedirle que active la vista grafica 1 mientras introduce comandos en la vista algebraica porque los comandos se vinculan con las vistas graficas que estén activas en ese momento.

Haciendo clic en la vista grafica 2 y seleccionando el icono IMAGEN

Quedando la cosa así:



(Seleccionamos imagen) y clicamos en cualquier lugar del tapiz de <u>la vista grafica 2</u> Se abrirá un desplegable para elegir que archivo grafico importamos.

() Abrir				x
<u>B</u> uscar en	: 🤷 Mis documentos		▼ 🗊 🕫 📰 -	
Documentos recientes Escritorio Mis documentos MI PC	Ash asscritorio atalleres Camtasia Studio CSATACOMBO_DRV_UTL_XP_v5.30A CyberLink Descargas descargatema Downloads Eluer Files Freemake FTN95 Examples gegI-0.0	 install-ti Mi diseño de fondo Mi música Mis archivos recibidos Mis archivos recibidos Mis imágenes My eSnips Downloads My Weblog Posts Nieves Nueva carpeta Octave3.6.4_gcc4.6.2_pkgs_2(Readiris Stareaza Downloads TomTom 	Previsualización inhabilitada	
	Nombre del archivo:		Abrir	
Mis sítios de red	Archivos de tipo: Imagen (jpg, jpeg, j	png, .gif, .bmp, .svg)	▼ Cancela	

En nuestro caso seleccionamos el archivo funcionesgeodibujo.jpg

() Abrir		Le damos a abrir archivo
Buscar er	: 🞯 Escritorio	y se nos carga en
	🔁 xfisicapapa	pantalla.
Documentos recientes	🚔 xoctave-matiab 🏠 xprogramacion-mtematicas	Probablemente esté
	Mis documentos bici	ajustarlo para una mejor
Escritorio	💼 cañon 💼 carletes	vista seleccionándolo y trasladándolo. Para ello
Mis documentos	funciones internas images	clicamos en el icono
Mi PC	MG_20140803_114949 lapiz2	
	Nombre del archivo: funciones 1.PNG	arrastramos la imagen
Mis sitios de red	Archivos de tipo: Imagen (.jpg, .jpeg, .png, .gif, .bmp, .svg)	hasta que quede centrada y podamos ver la

definición de las funciones internas más importantes.

Quedándonos así, como podemos ver en la siguiente pantalla.

(Observamos que hemos ingresado un archivo que contiene las funciones matemáticas más importantes en GEOGEBRA cuya sintaxis estará a nuestra disposición en la vista algebraica 2 y que usaremos en las actividades que siguen)



2.1 Ingreso de funciones

Para obtener la grafica de una función y=f(x) basta con escribir en el cajón de entrada

la fórmula analítica de la función. Si escribimos INTRO obtendremos la gráfica de la función y además el programa le asignará un nombre por defecto(en este caso f(x)).

Podemos, asignarle nosotros el nombre que queramos a una función, basta con escribir **nombre(x)=** "**expresión analítica**" por ejemplo onda(x)=2*cos(x) obteniendo las siguientes graficas:



Si queremos ocultar alguna de ellas podemos desactivarlas en la ventana algebraica haciendo clic sobre los botones asociados a los **objetos "función**"

 $f(x) = 4 \cdot \frac{x}{x^2 + 1}$ onda(x) = 2 cos(x)

Si presionamos estos botones verdes se ocultan(que no borran) las funciones quedando la vista limpia.

2.2 Numeración de funciones .Si nos interesa numerar una serie de funciones con subíndices basta escribir su nombre seguido de "guión bajo" y el numero que queramos. Así introduciremos



2.3 Graficas restringidas a un intervalo (definidas en un único intervalo)[a,b]

Usaremos el comando Función[f(x),a,b] ¡Ojo! Función con acento en la "o" donde f(x) es la expresión analítica de la función .Así, si desactivamos el resto de funciones

Dibujando



Actividad 3 Funciones para el primer ciclo de secundaria.(Listas de puntos ,tablas de valores y vista de hoja de cálculo).

Abrimos un nuevo archivo en blanco de geogebra y esta vez, en vez de activar la vista grafica2 activamos la vista de hoja de cálculo clicando sobre el menú vista y seleccionando vista de hoja de cálculo como en los siguientes pantallazos



Sabemos que nuestros alumnos introducen los puntos de las funciones uno a uno y luego unen los puntos con un trazo

3.1 Introducción de puntos en el cajón de entrada Basta con introducir en la caja

mediante paréntesis el punto Entrada: (1,1) y se nos dibujará en pantalla. Otra



forma es hacerlo con el ratón seleccionando el icono punto y dibujándolo con un clic en el tapiz .Pero sin duda la manera más rápida es con la hoja de cálculo que nos permite crear listas y tablas de números

Borremos, seleccionándolos los puntos que hemos dibujado.

Escribamos en dos columnas los siguientes pares ordenados (-3,9),(-2,4), (-1,1),(0,0),(1,1),(2,4),(3,9) como en la siguiente pantalla



3.2 Escritura de puntos en la hoja de cálculo

Si disponemos de tableta digitalizadora o de pizarra digital nuestros alumnos unirán los puntos con un dibujo mediante la **herramienta figura a mano alzada**

Luego podemos corregirlo dibujando la función y=x^2 quedando la pantalla así.





(ideal para pizarras digitales)

Ni que decir tiene que podemos introducir series de puntos escribiendo fórmulas al uso como en cualquier hoja de cálculo.

Guardamos nuestro archivo como práctica 3.

Practica 4 Análisis de gráficas usando imágenes

Geogebra permite el trabajo con archivos gráficos que podemos importar a nuestra vista gráfica y analizarlos con modelos gráficos conocidos por los alumnos. Veamos un ejemplo. Abrimos un nuevo archivo sin rejilla .

IMPORTANTE para trabajar con imágenes es útil asociarlas (incluirlas en un objeto de geogebra que las contenga)(polígonos, círculos, elipses triángulos etc)

Con la **opción imagen** del icono al final de la barra cargaremos el archivo grafico ARCO PARABOLICO .Lo





seleccionaremos con yo lo centremos en el sistema de coordenadas .Además sabemos que el polinomio interpolador que pasa por tres puntos viene definido por una parábola

como en la siguiente figura . Primero introduciremos el grafico en un polígono rectangular.

Seleccionaremos la imagen y con el botón derecho la dejaremos casi sin opacidad para colocarla con más precisión en los ejes





Eligiendo el menú propiedades hará que nos aparezcan un montón de pestañas con opciones que al principio tal vez nos agobien. Lo importante es buscar lo que nos interesa

	··
Preferencias	
Ĩ 其 📥 🖪	
Imagen	Básico Color Estilo Posición Avanzado Programa de guion (scripting)
Punto	Opacidad
- 3 A 3 B	
	0 25 50 75 100

 Señalando la pestaña color y disminuyendo la opacidad al 30% la imagen se volverá casi transparente y podremos situar el arco con precisión. Ahora formamos un polígono marcando los vértices de la fotografía con la herramienta punto.Oculto primero los puntos A y B y marco las cuatro esquinas
 C,D;E,F

Ahora creo un polígono con esos puntos y fijo la figura en él.eligiendo los puntos uno a uno.





Ahora ocultamos el polígono y vinculamos la imagen al rectángulo



Seleccionamos la imagen con el botón izquierdo y la movemos de lugar. Ahora la seleccionamos con el botón derecho y y asociamos la imagen a las esquinas del polígono.

Marcamos tres puntos en el monumento con el ratón



Punto en objeto Haz clic dentro de

Con la herramienta Polinomio

Entrada: Polinomio[G,H,I

con la lista de los

tres puntos marcados y veremos si se ajusta el monumento o no a una parábola

Este es el resultado .La propuesta bien podría haber sido encontrar algebraicamente la parábola que pasa por los tres puntos , que es realmente resolver un sistema de ecuaciones ,aunque esta manera de solucionarlo parece interesante .



Guardamos nuestro trabajo con el nombre de practica4.

Practica5 Ilustración del concepto de pendiente de una recta y pendiente local de una función en un punto asociada a esa recta

Abrimos un nuevo archivo y activando la rejilla, ingreso la función

 $y = 4x/(x^2+1)$

y marco un punto sobre la grafica .Trazo ahora la tangente a la grafica pasando por el punto como sigue:



Seleccionada la herramienta TANGENTES marcamos el punto y la grafica y obtenemos la recta tangente s a la grafica en dicho punto. Obtenemos el grafico que se encuentra en la siguiente página.

(ESTE ES EL ICONO QUE DEBEMOS SELECCIONAR)



Ahora vamos a importar la imagen de un dibujo de una bici

herramienta	a imagen importamos el archivo bici	
📿 Abrir		
Buscar en:	C Desktop	💌 🤌 📂 🖽 -
Documentos recientes Escritorio Mis documentos	 xprogramacion-mtematicas xmattespapa Mis documentos ARCO PARABOLICO bici cañon carletes funciones 1 funciones internas funcionesgeodibujo imagen1funciones images IMG_20140803_114949 	
	<u> </u>	

Imagen (.jpg, .jpeg, .png, .gif, .bmp, .svg)

🕨 bici.jpg : 140 x 90

•

Abrir

Cancela

Que queremos vincular al punto A.

Archivos de tipo:

Nombre del archivo:

bici.jpg

◀



y dibujo un círculo centrado

Selecciono la herramienta en A de lado 2

Trazo la perpendicular a la recta tangente pasando por A



Hallo ahora los puntos de corte de la circunferencia con las rectas obteniendo el siguiente dibujo



Ahora trazo la perpendicular al eje normal pasando por E con la herramienta y las perpendiculares a D y F y marco las intersecciones que forman el rectángulo

Oculto ejes, salvo la recta tangente y formo el polígono que une los puntos quedando así.(el





rectángulo)

Ahora quiero vincular el grafico a los puntos del rectángulo seleccionando la imagen con el botón derecho eligiendo la pestaña posición, así

(esquina uno D, esquina 2 F ,esquina 4 G)

	Preferencias		X
			D,
	Cuadrilátero	Básico Color Estilo Posición Avanzado Programa de guion (scripting)	
	■ Cónica └──	Esquina1: D	
	■ Función └── @ f	Esquina2: F	
	■ Imagen ⁱ imagen1	🗈 Esquina4: 📴 💌	
		🗖 Posición absoluta en pantalla	
-			
	- 0 E		



Ocultamos el circulo y el polígono y los puntos limitantes y **ahora animamos el punto A, seleccionándolo** y activando la casilla de **animación**, y se vera de manera intuitiva que significan los puntos con mayor pendiente y los de pendiente más suave. También es interesante modificar la función y ver el comportamiento resultante con otra clase de funciones



Guardamos la hoja como practica5

Practica 6 Funciones a trozos versus trozos de funciones

Vamos ahora a dibujar funciones a trozos

Para eso abrimos otro archivo y usaremos el comando si(if). Sea la función

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 2\mathbf{x} + 4 & \mathbf{si} & \mathbf{x} > 0\\ 4 - 2\mathbf{x} & \mathbf{si} & \mathbf{x} < 0 \end{cases}$$

La sintaxis para ingresar la función es la siguiente Si[condición,f1,f2 en otro caso]



Si queremos representar mas trozos hay que recurrir a Sies anidados como por ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si & x \le 1 \\ x & si & 1 < x \le 3 \\ -x + 6 & si & 3 < x \le 6 \\ 0 & si & 6 < x \end{cases}$$

La sintaxis así se complica bastante. Escribimos

Si[x<=1,1,Si[x<=3,x,Si[x<=6,-x+6,0]]] en el cajón de entrada ocultamos la otra grafica y validamos

Entrada: Si[x<=1,1,Si[x<=3,x,Si[x<=6,-x+6,0]]]



Como vemos la sintaxis se hace compleja y susceptible a los errores .A la hora de dibujar, por economía es mejor representar cada trozo por su lado con el comando Función y reunirlos en un solo grafico aunque se pierde parte de la potencia de análisis del programa. Si usamos el

Propiedad	Valor
 Mínimo	(0.8522,1)
Máximo	(2.4952 , 2.4952)
Raíz	Sin raíces
Integral	3.1178
Área	3.1178
Media	1.5589
Longitud	2.6213

a = 2 ᠿ Analizador de funciones Elige la función a analizar

analizador de funciones (icono)

nos permite analizar intervalos de nuestra

función globalmente como un único objeto, mientras que si definimos trozos de función solo puedo analizar esos trozos sin tener opción de combinarlos con el resto.(como partes independientes de funciones distintas).

💭 Analizador de funciones	X
$g(x) = \mathrm{Si}[x \leq 1, 1, \mathrm{Si}[x \leq 3, x, \mathrm{Si}[x \leq 6$	i, -x + 6,0]]] 🔹 💰
Intervalo Puntos	
	+ ×
x	y(x)
1.4952	1.4952
	\checkmark

Podemos ahora, derivar una función (aunque este definida a trozos) con el comando Derivada[f(x),n], es decir f(x) es la función y n el orden de derivación. (Si n=1 no hace falta ponerlo) y obtener nuevas funciones.



Terminamos con la práctica y guardamos el trabajo como practica 6

Practica 7 (primer ciclo) Dominio recorrido y grafo

Diseñaremos una hoja con un cuadro de entrado para introducir funciones y mediante animaciones de punto y activación del trazo para aclarar a los alumnos los conceptos enunciados antes.

Abrimos un archivo nuevo e introducimos una función (la que sea) por ejemplo abs(x) (valor absoluto de f). Seleccionamos punto sobre objeto en la grafica.



para hallar las coordenadas x, y usando la herramienta punto de intersección. Seleccionándolos uno por uno, con el botón derecho modificamos el color de cada uno y su grosor y activamos el rastro Punto en objeto de ellos. Si animamos el punto A cuando recorre la grafica se nos Haz clic dentro de dibujara al mismo tiempo el dominio y el recorrido de la función, de

Ahora trazamos las perpendiculares a los ejes pasando por el punto

manera que los estudiantes lo entiendan y lo puedan dibujar al menos de manera intuitiva,. Veamos algunos ejemplos





a=2 Deslizador

OK Botón

Casilla de control

Color verde Dominio, color naranja grafo, color lila

recorrido.

7.2 Creacion de una casilla de entrada en la vista grafica para ingresar funciones

Vamos a marcar ahora una casilla de entrada vinculada con la



Si modificamos la función en la casilla se modificara en la vista algebraica Animamos el punto y estudiamos dominios recorridos y grafos de otras funciones sin tener que ingresarlos en la ventana algebraica

Veamos la función floor(x)

Tenemos una función escalera con recorrido discreto



Guardamos el archivo como practica 7

Practica 8 Familias de funciones, deslizadores .Interferencia de ondas

Los deslizadores son herramientas que nos permiten definir parámetros o variables que pueden animar y –o modificar los objetos que dependan de ellos .

En secundaria, se estudian las familias de funciones elementales y su animación con deslizadores nos permite conocer mejor su estructura.

Actividad 8.1 Funciones afines y=mx+n



Abrimos un nuevo archivo de geogebra y definimos dos deslizadores que llamaremos m y n .Si hacemos clic en el icono "deslizador "y sobre el tapiz de la vista grafica definimos el primer parámetro "m"

Introduzco en el cajón de entrada y=mx+n

Ahora si modificamos los valores del deslizador m la recta gira. De igual manera si modificamos n la recta se desplaza trasladándose verticalmente.



Variamos la m

Y estudiamos el significado de la pendiente

Variamos la n



y estudiamos el significado de la ordenada en el origen

Actividad 8.2. Interferencias de ondas y suma de ondas

Las ondas viajeras están formadas por sumas de ondas se desplazan a la misma velocidad y sentidos contrarios .Seran funciones de la forma (f(x-a)+f(x+a)) y usaremos **a** como un parámetro con un deslizador.

Vamos a de finir una función armónica $f(x)=2^* \sin(x)$ introduciéndolo en el cajón de entrada



Ahora podríamos definir un deslizador, igual que en la actividad anterior, pero las nuevas versiones nos permitirán hacerlo de otra manera. Introduzcamos en el cajón de

	4-	
Crea deslizadores		x
a=2 Crea algún de:	slizador para: a	
Crea deslizadores	Cancela	

entrada f(x-a) . Entrada: f(x-a) obteniendo lo siguiente:

Aparece una alerta con la sugerencia para crear un deslizador. Le damos al botón crear deslizadores.

Ahora hago lo mismo con f(x+a)

Obtenemos dos ondas que se moverán en direcciones opuestas .Si sumamos las ondas tendremos puntos con interferencia constructiva y destructiva. por tanto

introduciremos la función **sumaondas(x)=g(x)+h(x)**.Le damos un grosor más grande para que destaque y animamos el deslizador para ver el resultado.



si ahora modulamos la onda suma multiplicandola por cos(a*x) obtendriamos la siguiente grafica.(primero ocultamos la suma de ondas) Le damos un grosor grande con un color verde para que se distinga y tenemos:



Ocultamos las ondas viajeras y obtenemos animando el deslizador



<u>Consideraciones finales</u> Hay muchos y muy buenos tutoriales sobre funciones con geogebra en la red. Por eso la elección de las actividades es muy personal, pero con un enfoque orientado a nuestro quehacer cotidiano con los alumnos de secundaria. Muchas de las actividades originales han debido ser suprimidas por cuestiones de espacio pero que se incorporaran a la página web del INSTITUTO DE GEOGEBRA DE CASTILLA LA MANCHA. Si algún punto ha quedado obscuro , pido disculpas de antemano y agradecería los comentarios y criticas constructivos que mejoren la calidad y comprensión de las actividades. Envíen sus comentarios a la dirección de correo <u>carlosmotos2000@gmail.com</u>