# El ordenador como instrumento matemático.

**Autores**: **Joaquín Jiménez Ramos y María José Haro Delicado**

joaquin.jimenez@edu.jccm.es mjharo@ono.com

**Lugar de trabajo**: I.E.S. Al-Basit (Albacete-España)

**Resumen**: Construir el propio conocimiento, debe ser uno de los principales objetivos de cualquier proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. El ordenador, junto con el software adecuado, se ha convertido en un recurso imprescindible para lograrlo. Pretendemos con este trabajo introducir muy brevemente el software libre wxMaxima, como herramienta que, a través de la visualización y la manipulación de conceptos y propiedades, favorece el aprendizaje por descubrimiento, pilar fundamental en la construcción del conocimiento.

**Introducción**: Para poder introducir a nuestros alumnos y alumnas, en la utilización del ordenador como una herramienta Matemática, es necesario contar con un aula dotada del suficiente número de ordenadores, así como del software adecuado.

La utilización de estos recursos ayudará a consolidar contenidos matemáticos y permitirá profundizar más en muchos de ellos, particularmente, en el caso de alumnos que estén motivados. Aprender será más fácil, ya que el estudiante podrá seguir su propio ritmo de trabajo realizando, entre otras cosas, numerosos ejercicios que podrá autocorregir. El proceso será más productivo si agregamos a nuestros propios materiales los recursos que nos ofrece Internet (web, blog, moodle,…), ya que los estudiantes podrán continuar y ampliar en su casa el trabajo realizado en el aula.

**Utilizar el ordenador como herramienta Matemática.**

Utilizaremos el software (habitualmente libre) más adecuado en cada caso: GeoGebra, hoja de Cálculo, **WxMaxima**, etc.

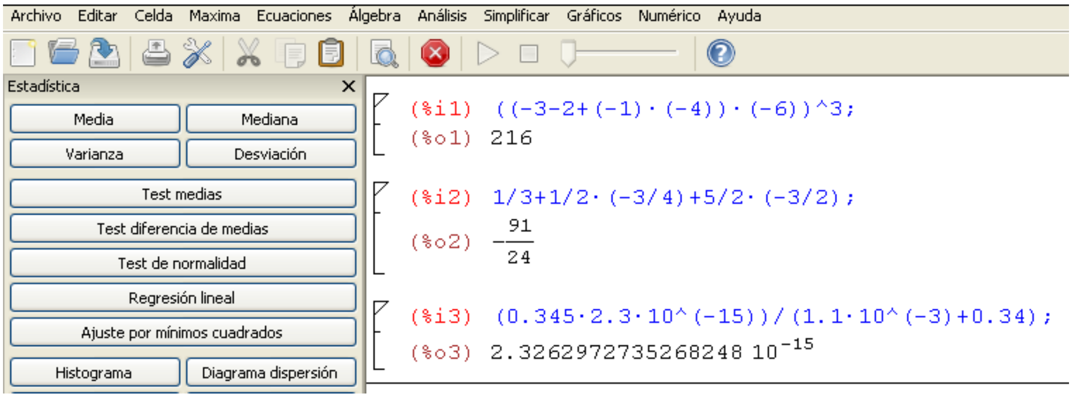
En esta ocasión nos referiremos al software libre **WxMaxima**, utilizado en el segundo ciclo de la ESO y en primero de Bachillerato, como herramienta de autocorrección e investigación.

Por ejemplo, si queremos corregir ejercicios sobre números reales como los siguientes:

*Efectúa las siguientes operaciones*

*a)* $[[-3-2+(-1).(-4)].[-6]]^3$ ; *b)* $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$ *c)* $\frac{0{,}345.2{,}3.10^{-15}}{1{,}1.10^{-3}+0{,}34}$

Utilizaremos el programa **WxMaxima**




Para pasar de fracción a decimal, detrás del número u operación ponemos: ", **numer**".

```
(%i6) 4-(1/4),numer;
(%o6) 3.75
```

Y para pasar de decimal exacto a fracción, utilizamos: **rationalize(número u operación)**.

```
(%i7) rationalize(0.25);
(%o7) 1/4
```

Podemos escribir números conocidos (irracionales o complejos), denominándolos por su nombre con el símbolo % delante (%pi, %e, %phi, %i, etc.) Para aproximar un irracional a un decimal (por defecto 16 dígitos), utilizamos float(número u operación).

```
(%i9) float(%pi);
(%o9) 3.141592653589793
```

Si queremos aumentar o disminuir el número de dígitos de aproximación, utilizamos **fpprec:número de dígitos de precisión; bfloat(número u operación)**.

```
(%i10) fpprec : 30;bfloat(sqrt(2));
(%o10) 30
(%o11) 1.41421356237309504880168872421b0
```

Los alumnos de Bachillerato, pueden utilizar **WxMaxima**, para corregir ejercicios y problemas de funciones, límites, continuidad, derivadas e integrales.

```
(%i18) limit((sqrt(x+6)-3)/(3-x), x, 3);
(%o18) -1/6

(%i19) limit((x^2-3·x+4)/(x^2-2·x-8), x, 1,minus);
(%o19) -2/9
```

Podemos resolver ecuaciones o sistemas de ecuaciones como las siguientes:

1) $\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2.x-y-3.z=0 \\ -x+2.y-2.z=-5 \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} 2.x+y=2 \\ 2.x^2-y^2=-46 \end{array}$

---

(%i10) linsolve([x+y+z=1, 2·x-y-3·z=0, -x+2·y-2·z=-5], [x,y,z]);

(%o10) $[x=1, y=-1, z=1]$

(%i11) algsys([2·x+y=2, 2·x^2-y^2=-46], [x,y]);

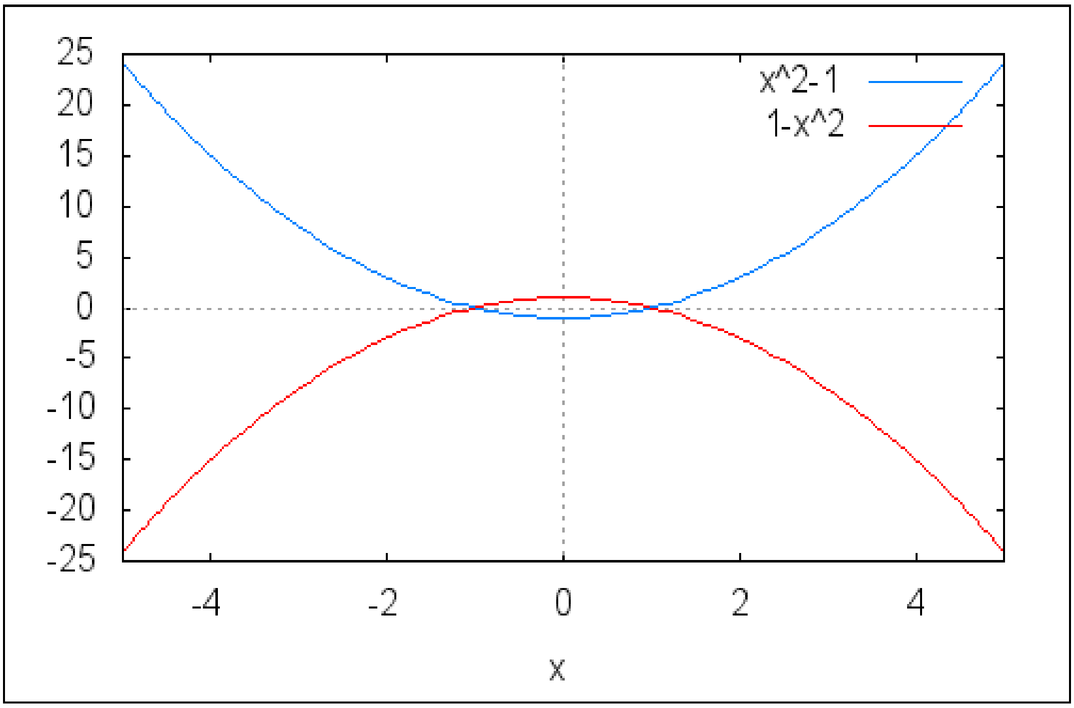
(%o11) $[[x=7, y=-12],[x=-3, y=8]]$

También representar gráficamente funciones, como las que se muestran a continuación

---

(%i1) wxplot2d([x^2-1,-x^2+1], [x,-5,5])$

(%t1)




La realización de actividades para investigar y descubrir es otro aspecto a tener en cuenta.

Veamos algunos ejemplos:

1. Estudio de funciones a través de la representación gráfica de sus derivadas.

Si trabajamos, por ejemplo, con la función $f(x)=x^3 \cdot e^x$, los estudiantes tendrán que hallar la primera y segunda derivadas con **WxMaxima** y representarlas gráficamente, utilizando los comandos:

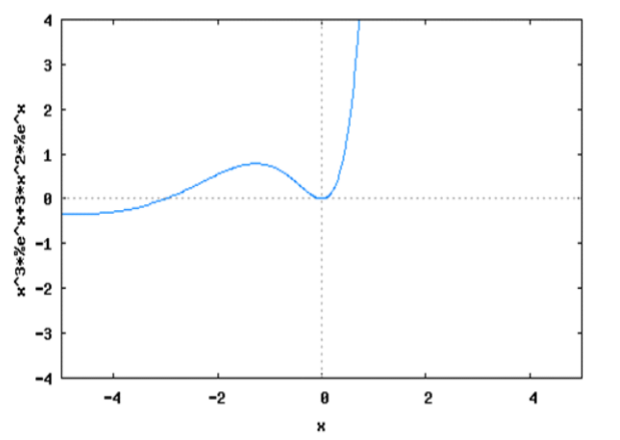
**diff(x^3*exp(x),x,1);**

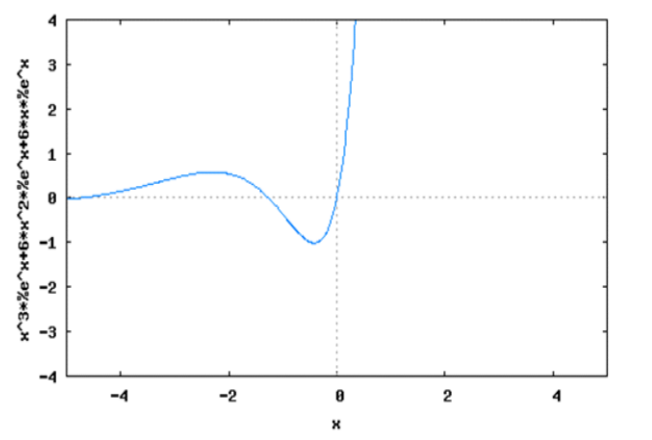
**wxplot2d([diff(x^3*exp(x),x,1)], [x,-5,5], [y,-4,4])$**

**diff(x^3*exp(x),x,2);**

**wxplot2d([diff(x^3*exp(x),x,2)], [x,-5,5], [y,-4,4])$**

El resultado será el siguiente:




A partir de las dos gráficas, que representan las derivadas primera y segunda de la función, los estudiantes tendrán que hacer el estudio local de ella, para hablar de intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, concavidad, convexidad y puntos de inflexión. Explicarán los aspectos de las dos gráficas en los que apoyan sus conclusiones.

## 2. Estudio del número de bronce, relacionándolo con las fracciones continuas y las sucesiones generalizadas de Fibonacci

A partir de la ecuación $x^2$-px-1=0  donde p=1, 2, 3,…, podemos plantear a nuestros alumnos cuestiones como las siguientes:

a) ¿Reconoces algunos de los números que obtienes? Si no los reconoces, busca información sobre dichos números

b) Si p=3, ¿cuáles son las soluciones de la ecuación anterior?

c) Fíjate que la ecuación $x^2$-3x-1=0 es equivalente a la siguiente expresión $x = 3 + \frac{1}{x}$

Si en el miembro de la derecha sustituyes x por $3 + \frac{1}{x}$, ¿Qué obtienes? ¿Qué ocurrirá si repites el proceso unas cuantas veces más?

A la expresión que has obtenido en el apartado anterior se le llama fracción continua y con ella podemos aproximar el valor de la solución positiva de la ecuación con la que estamos trabajando

d) Obtén con **WxMaxima** la fracción continua correspondiente a $\frac{\mathbf{3+\sqrt{13}}}{\mathbf{2}}$

e) Ayúdate de **WxMaxima** para obtener las convergentes de dicha fracción continua. Compara los valores de dichas convergentes con el valor de $\frac{\mathbf{3+\sqrt{13}}}{\mathbf{2}}$. ¿Qué observas?

f) Vamos a obtener a continuación una sucesión de números enteros, $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de la siguiente forma:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 3$$
$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{10}{3}$$
$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{33}{10}$$
$$\frac{a_5}{a_4} = \frac{109}{33}$$
$$\frac{a_6}{a_5} = \frac{360}{109}$$
...

¿Cuáles son los valores de los términos de dicha sucesión?

Comprueba que a partir de las expresiones anteriores y considerando $a_1 = \mathbf{1}$ y $a_2 = \mathbf{3}$, se obtiene que $a_n = a_{n-2} + ka_{n-1}$ . Averigua previamente el valor de k. ¿Qué nombre recibe una sucesión como la que has obtenido?

h) Obtén con **WxMaxima** el término general de dicha sucesión. Demuestra que ese es ciertamente el valor del término general usando el método de inducción.

***Observaciones***:

*En el apartado e) obtendremos la fracción continua con las instrucciones:*

```
(%i3) cflengh : 35$

(%i2) cf((3+sqrt(13))/2);
(%o2) [3,3,3,3]
```

*Podemos usar **WxMaxima** en el apartado e) para obtener las convergentes, según los cálculos se hacen más farragosos.*

*Resolveremos directamente el apartado h) con **WxMaxima,**.ya que la complejidad de la sucesión no permite hacerlo a los estudiantes directamente, apoyándose sólo en sus conocimientos previos. Lo interesante es obtener la demostración por inducción. Las instrucciones utilizadas para obtener el término general son las siguientes:*

```
(%i4) load(solve_rec)$

(%i5) solve_rec(a[n]=a[n-2]+3*a[n-1],a[n],a[1]=1,a[2]=3);
```

(%o5) $a_n = \frac{(\sqrt{13}+3)^n}{\sqrt{13}\,2^n} - \frac{(\sqrt{13}-3)^n(-1)^n}{\sqrt{13}\,2^n}$

De manera similar se puede trabajar con otros números metálicos como el de oro y el de plata.

**BIBLIOGRAFÍA**

Página de ayuda de WxMaxima http://andrejv.github.io/wxmaxima/