# Actividades para introducir los logaritmos de forma indolora en 4º de ESO y bachillerato.

Elena Gajate Paniagua. Licenciada en Matemáticas por la Universidad de Salamanca. IES Maestro Juan de Ávila (Ciudad Real). elenagajate@gmail.com

**Núcleo temático:** Herramientas, materiales y otros recursos de apoyo para trabajar matemáticas.

***Abstract:*** *Muchas personas recuerdan los logaritmos como algo engorroso y poco útil que tuvieron que aprender en su adolescencia no se sabe muy bien por qué.*

*Para luchar contra esta idea se presentan algunas actividades en las que los estudiantes perciben la necesidad del concepto de logaritmo y su utilidad práctica (mejora del cálculo mental, comprensión de fenómenos físicos, representación de magnitudes...). Se proponen también alternativas a las típicas ecuaciones logarítmicas de los libros de texto utilizando, entre otros, aplicaciones del móvil, geogebra o la hoja de cálculo para resolver problemas contextualizados en los que intervienen logaritmos.*

El estudio de los logaritmos aparece en el currículo oficial en las matemáticas académicas de 4º de ESO y en 1º de bachillerato, tanto científico como de humanidades y CC. SS. En concreto, en los siguientes estándares de aprendizaje:

*"Calcula logaritmos a partir de su definición o mediante la aplicación de sus propiedades y resuelve problemas."* **(**4º ESO Matemáticas académicas, B2.1.4**)**

*"Utiliza las propiedades de los logaritmos para resolver ejercicios y problemas asociados a fenómenos físicos, biológicos o económicos." (*Matemáticas I, B2.3.1)

*"Estudia y analiza funciones en contextos reales." (*Matemáticas I, B3.1.4)

*"Utiliza las propiedades de los logaritmos para resolver ejercicios y problemas asociados a las ciencias sociales." (*Matemáticas aplicadas a las CC SS I, B2.1.4)

Sin embargo, en los libros de texto de 4º analizados, lo que encontramos es la definición de logaritmo y sus propiedades, ejercicios de aplicación de estas propiedades (Editex, Anaya, Edelvives), y en algún caso (SM), y como apéndice al tema, algún ejemplo con la escala de Richter o el pH. En los de bachillerato, muchas ecuaciones descontextualizadas en el tema de álgebra, y el estudio de la función logarítmica en otro tema distinto, a menudo también descontextualizada.

Nuestro objetivo es introducir los logaritmos dándoles un sentido y un contexto real. Se cuenta aquí la experiencia realizada en los últimos cursos en 4º de ESO y 1º de bachillerato científico-tecnológico.

**Introducción del concepto de logaritmo en 4º de ESO**

En 4º de ESO intentamos despertar la curiosidad y ver la necesidad de los logaritmos antes de definirlos. Para ello plantearemos las siguientes actividades:

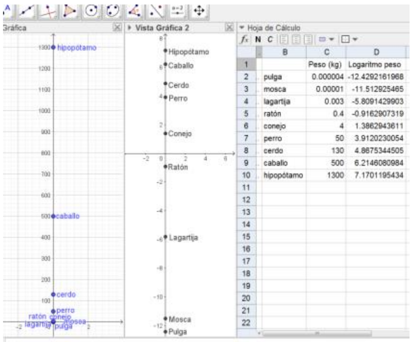
1. El experimento de los decibelios.

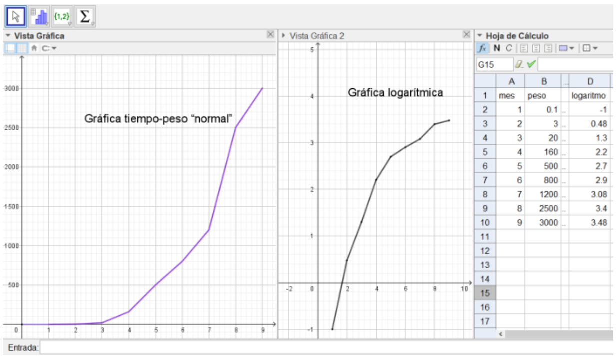
Es necesario tener descargado en el teléfono móvil un sonómetro o medidor de decibelios. Se les pide a dos alumnos que hagan "Ahhh" delante del móvil, primero cada uno por separado y después los dos a la vez. Los decibelios emitidos por los dos no son, como muchos esperaban, la suma de los que emiten por separado. ¿Por qué sucede esto? La respuesta no se puede dar aún, pero pronto la conocerán.

2. Escalas imposibles

a) Invitaremos a los alumnos a investigar sobre el tamaño de los animales. Se les pedirá que, buscando información en internet, hagan una tabla con el peso medio de al menos 10 ó 12 animales de distintos tamaños y en los que aparezca el más pequeño y el más grande, así como representantes intermedios. Después se les pedirá que elaboren un gráfico numérico lineal en el que sitúen a cada animal en el valor que les corresponde por su peso medio. Así se percatarán de la dificultad de elegir la escala adecuada para que quepan todos y no aparezcan amontonados los más pequeños. La forma de resolver este problema es clasificarlos según el exponente de su peso expresado como potencia de base 10.

b) Se pedirá que elaboren un gráfico temporal de, por ejemplo, la evolución del peso de un embrión humano a lo largo de los nueve meses de gestación, o la evolución de la población de un país a lo largo de un lapso temporal de varios siglos. En ambos casos la curva parece en su primer tramo “pegada al suelo”, como si ahí no hubiera habido evolución. O bien, si queremos ver ésta, no podemos dibujar la curva entera ya que al final se dispara y no cabe. De nuevo tenemos un problema de escala, que resolvemos expresando los datos como potencias decimales y fijándonos en el exponente.






3. Otra forma de multiplicar y dividir.

Muchos estudiantes sólo “saben” multiplicar o dividir utilizando el algoritmo tradicional aprendido en la infancia. Si se les pide que dividan 1024 entre 32 a pocos se les ocurrirá expresarlos mentalmente como potencias de 2 y restar exponentes. Lo mismo para hacer raíces o potencias. Se propondrá a los alumnos utilizar esta “técnica” para que comprueben el ahorro de trabajo que a veces supone expresar los números en una base concreta, como se muestra en el siguiente ejemplo:

*A continuación tienes una tabla con las 16 primeras potencias naturales de 2:*

| Exponente n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Potencia $2^n$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 | 2048 | 4096 | 8192 | 16384 | 32768 |

*Calcula mentalmente, con su ayuda, a)* $1024 \cdot 8$ *b)* $32768 : 128$ *c)* $32^3$ *d)* $\sqrt{4096}$

Antes de que se generalizasen las calculadoras, la tabla de logaritmos permitía simplificar cálculos como los anteriores expresando los números como potencias de 10. Aunque no se explique exhaustivamente el proceso que se seguía, es interesante que nuestros alumnos conozcan, al menos rudimentariamente, cómo se calculaba hasta hace no tanto tiempo.

4. Solución al problema del sonómetro: ¿Cómo se mide el ruido?

La definición formal del decibelio puede resultar a primera vista un poco difícil de entender a muchos estudiantes:

$$dB = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

Como $I_0$ refleja la intensidad mínima que percibe el oído humano, el cociente sirve simplemente para poner el resto de intensidades en relación a aquélla, es decir, se toma como unidad de medida la intensidad umbral (UA).

El rango de sonidos percibidos por el oído humano es tan grande que es más práctico tomar el logaritmo de la intensidad, ya que al mismo tiempo distinguimos diferencias de intensidades muy sutiles para ese enorme rango (podríamos decir que oímos logarítmicamente). Esto se ve en la siguiente tabla:

| Sonido | Intensidad en w/m$^2$ | Intensidad en UA | Logaritmo (belios) | Decibelios (10 x belios) |
|---|---|---|---|---|
| Umbral de audición | $10^{-12}$ | **1** | 0 | 0 |
| Estudio de grabación | $10^{-11}$ | **10** | 1 | 10 |
| Biblioteca en silencio | $10^{-9}$ | **1000** | 3 | 30 |
| Lavadora | $10^{-6}$ | $\mathbf{10^6}$ | 6 | 60 |
| Patio de recreo | $10^{-4}$ | $\mathbf{10^8}$ | 8 | 80 |
| Martillo neumático | $10^{-1}$ | $\mathbf{10^{11}}$ | 11 | 110 |
| Umbral de dolor (explosión) | 1 | $\mathbf{10^{12}}$ | 12 | 120 |

*Fuente: http://www.cochlea.org/es/sonidos/campo-auditivo-humano*

Si el “Ahhh” de Cristina alcanzaba los 63 dB y el de Luis los 58 dB, tendríamos:

| | dB | belios | Intensidad en UA |
|---|---|---|---|
| Cristina | 63 | 6.3 | $10^{6.3} \cong 1\,995\,000$ |
| Luis | 58 | 5.8 | $10^{5.8} \cong 631\,000$ |
| Juntos | | | $2\,626\,000$ |

Como $\log 2\,626\,000 \cong 6.4$, juntos emiten 64 dB

Podemos invitar a nuestros alumnos a buscar más ejemplos (pH, terremotos, luminosidad de las estrellas…); todos tienen en común rangos enormes en los que los valores más pequeños están sin embargo tan próximos que con una escala normal se confundirían. La escala logarítmica se presenta así como una solución ingeniosa y práctica. Hemos observado que introducir así los logaritmos en 4º de ESO contribuye a recordar mejor luego la definición formal, además de disminuir el rechazo hacia ellos.

**Los logaritmos en bachillerato**

En el caso del bachillerato, donde el concepto ya es conocido, el tema de los logaritmos se suele reducir a la resolución de ecuaciones más o menos enrevesadas y al estudio de las propiedades de la función logarítmica.

En este nivel proponemos conectar el estudio de los logaritmos con el de algunas funciones exponenciales relevantes para así resolver, usando logaritmos, "*problemas asociados a fenómenos físicos, biológicos o económicos*", como exige el currículo oficial. Además del ejemplo típico del crecimiento exponencial, disponemos de otros muchos fenómenos que siguen modelos exponenciales; nos pararemos en dos:

1. Ley de enfriamiento de Newton:

Cuando un cuerpo que está a una temperatura $T_0$ pasa a un ambiente que está más frío o más cálido (a temperatura $T_m$), su temperatura (T) al transcurrir el tiempo (t) varía según la función

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-rt}$$

donde "r" es una constante que depende del cuerpo y que se puede calcular experimentalmente haciendo una medición. Por ejemplo:

*Un alimento que está a 20°* $(T_0)$ *se introduce en un horno a 200°* $(T_m)$ *y 15 minutos después está a 80°. ¿A qué temperatura estará al cabo de media hora? ¿Cuánto tardará en ponerse a 180°?*

La primera medición nos permite calcular r resolviendo la ecuación exponencial:

$$T(15) = 80 \Rightarrow 80 = 200 - 180 \cdot e^{-15r} \Rightarrow e^{-15r} = \frac{120}{180} \Rightarrow r = -\frac{1}{15}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

Una vez obtenida r podemos contestar a la primera pregunta hallando T(30) y a la segunda resolviendo la ecuación exponencial $T(t) = 180$. Como la incógnita está en el exponente, es necesario utilizar logaritmos para despejarla.

2. Crecimiento logístico

Las plagas, enfermedades y las poblaciones en general crecen inicialmente siguiendo modelos exponenciales $\mathrm{P(t) = P_0 \cdot e^{rt}}$, pero cuando las condiciones dejan de ser óptimas el crecimiento se ralentiza. El modelo matemático que refleja esta situación es la función logística. Si las condiciones ambientales permiten un máximo de L individuos, el crecimiento sigue la ecuación

$$P(t) = \frac{L}{1 + k \cdot e^{-rt}} \quad \text{con} \quad k = \frac{L}{P_0} - 1$$

Supongamos que a una comunidad llegan 50 personas portadoras de una enfermedad contagiosa. Sabemos que en condiciones idóneas, la tasa de crecimiento mensual del número de infectados es de un 5%, pero que las condiciones sanitarias no permiten que este número supere los 1000 infectados; estamos ante un ejemplo de crecimiento logístico:

$$k = \frac{1000}{50} - 1 = 19;\ 1{,}05^t = e^{t\,ln\,1{,}05} = e^{0{,}05t} \Rightarrow P(t) = \frac{1000}{1 + 19 \cdot e^{-0{,}05t}}$$

Si queremos saber cuántos meses han de pasar para que el número de infectados supere por ejemplo los 500, debemos resolver una ecuación exponencial y usar logaritmos para despejar la t:

$$P(t) > 500 \Rightarrow \frac{1000}{1 + 19 \cdot e^{-0,05t}} > 500 \Rightarrow 1 + 19 \cdot e^{-0,05t} < 2 \Rightarrow t > \frac{\ln 19}{0,05} \cong 59$$

3. Otras ecuaciones logarítmicas contextualizadas surgen en problemas de decibelios o mezclas de sustancias de distinto pH como los siguientes:

*Si un violín emite 85 decibelios ¿cuántos emitirá un cuarteto de violines? ¿Cuántos violines se necesitarán para llegar a los 100 dB?*

$$10 \cdot \log(4 \cdot 10^{8,5}) \cong 91;$$

$$100\ \mathrm{dB} = 10\mathrm{B} \Rightarrow 10 = \log(\mathrm{x} \cdot 10^{8,5}) \Rightarrow \mathrm{x} \cdot 10^{8,5} = 10^{10} \Rightarrow \mathrm{x} = 10^{1,5} \cong 32$$

*Si mezclo un litro de agua (de pH 7) con un litro de zumo de limón (de pH 2) ¿cuál será el pH de la mezcla? ¿Cuánta agua hay que echar a un litro de limón para que el pH de la mezcla sea 4?*

$$\mathrm{pH\ (mezcla\ a\ partes\ iguales)} = -\log\left(\frac{10^{-7} + 10^{-2}}{2}\right) \cong 2,3$$

Si llamamos x al número de litros de agua necesarios para elevar el pH a 4:

$$-\log\left(\frac{x \cdot 10^{-7} + 10^{-2}}{1 + x}\right) = 4 \Rightarrow \frac{x \cdot 10^{-7} + 10^{-2}}{1 + x} = 10^{-4} \Rightarrow x \cong 990$$

Si bien las ecuaciones obtenidas son quizá más sencillas de resolver que las que aparecen en los libros de texto, pensamos que obtenerlas es una actividad más rica cognitivamente y que contribuye mejor a entender el sentido de los logaritmos, así como a relacionar conceptos que no deberían verse de forma desconectada.

Bibliografía:

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Logistica_y_exponencial/logistica.htm

http://www.cochlea.org/es/sonidos/campo-auditivo-humano

https://es.wikipedia.org/wiki/Ley_del_enfriamiento_de_Newton